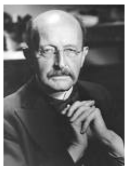
A Mecânica Quântica Ondulatória

Prof. Émerson F. Cruz

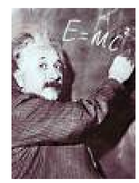
1 - A equação de Schrödinger



Em artigo intitulado “**Sobre a Teoria da lei da Distribuição de Energia do Espectro Normal”,** o renomado cientista **Max Planck** deu início em 14 de dezembro de 1900 a uma das maiores , senão a maior, revoluções na história da Física.Basicamente, o artigo resolvia um problema que a **Mecânica Clássica** não dava conta de explicar : a distribuição espectral da radiação de um **corpo negro.** Para solucionar o problema , Planck valeu-se da **Mecânica Estatística** e de um artifício (assim se imaginava no início) muito engenhoso: dividir a energia em “pacotes” ou **quantas** de energia. “Pacotes de energia” de intensidade:

$$E = nhf \qquad n = 0,1,2,3....$$

Onde **h** é a famosa **constante de Planck** e **f** é a freqüencia da radiação.



Em 1905 **Albert Einstein**, explicou o efeito fotoelétrico interpretando a luz como um feixe de partículas: os *fótons*. Ainda em 1905 o mesmo brilhante cientista postulou as leis da *Teoria da Relatividade Restrita* culminando na famosa expressão $\mathbf{E=mc^2}$.

No ano de 1924 o francês **Louis De Broglie**, especulando sobre o fato de que ondas, como a luz, em determinados fenômenos podem se comportar como partículas, propôs uma interpretação para fenômenos onde partículas se comportavam como ondas, como o fenômeno da difração de elétrons. Combinado a expressão para a energia dada por Max Planck com a proposta por Einstein, De Broglie sugeriu que toda partícula possui um *comprimento de onda* associado ao seu *momentum linear* de acordo com a relação:

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

Assim, se elementos como partículas estão associados de alguma forma a uma onda, surge imediatamente à pergunta: qual a *função de onda* que representa este vínculo?

Em 1926 o Físico austríaco **Erwin Schrödinger** propôs uma *equação diferencial* cuja solução proporciona a tal função de onda. Para uma dimensão esta equação é dada por:

$$\boxed{-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}}$$

2 – Operadores, valores esperados e Princípio da Incerteza

Com o postulado de sua equação diferencial Schrödinger cria uma *teoria ondulatória* para a Mecânica Quântica. Sob a luz dessa teoria, toda grandeza física é representada por um tal *operador* aplicado à função de onda determinada pela solução da equação de Schrödinger.

A tabela abaixo reúne as grandezas físicas básicas na Mecânica e seus respectivos operadores:

Grandeza Física	**Operador**
Posição ***(x)***	x
Momentum linear ***(p)***	$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
Energia ***(E)***	$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

A Mecânica Quântica já dava seus primeiros passos como uma teoria físico-matemática consistente, mas ainda existiam alguns “cabos soltos”, como, por exemplo, a *interpretação física* da função de onda. Em 1926 **Max Born** propõe uma interpretação para a função de onda: uma *densidade de probabilidade.*

Na verdade, por ser de natureza *complexa*, a função de onda não poderia representar uma densidade de probabilidade, mas o produto dela por seu complexo conjugado sim! Logo, dada uma distribuição da probabilidade “P” em função da variável “x”, temos:

$$P = P(x)$$

então:

$$\rho(x) = \frac{dP}{dx} \Rightarrow dP = \rho(x)dx$$

logo:

$$P = \int_a^b \rho dx$$

utilizando a interpretação probabilística de Max Born, temos:

$$\rho \equiv \left|\Psi(x)\right|^2 = \Psi^*\Psi$$

o que resulta em:

$$\boxed{P = \int_a^b \Psi * \Psi dx}$$

A partir deste momento não faz mais sentido pensarmos em *valores determinados* das grandezas físicas. Mas sim em *valores médios ou esperados.*

Para uma dada grandeza física “A”, representada pelo seu correspondente operador, o *valor esperado* desta grandeza em dado intervalo [a,b] é dado por:

$$\boxed{\langle A \rangle = \int_a^b \Psi^* A \Psi dx}$$

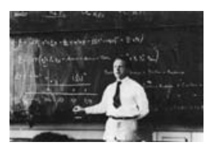
Um operador importante, como veremos adiante, é:

$$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle$$

É fácil demonstrar que o *valor esperado* de $(\Delta A)^2$ é dado por:

$$\boxed{\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2}$$

Assim, a Mecânica Quântica Ondulatória emerge como uma teoria física matematicamente consistente, mas com uma proposta física revolucionária: a interpretação probabilística da natureza!



Mas as surpresas não pararam por aí. Em 1927 o físico alemão **Werner Heisenberg** conclui que a interpretação probabilista leva ao que hoje conhecemos como *Princípio da Incerteza:*

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

3 - A equação de Schrödinger independente do tempo

Para nos habituarmos com a Mecânica Quântica de Schrödinger é necessário o exercício dos procedimentos matemáticos através de situações clássicas em que a função de onda pode ser obtida sem maiores problemas. As dificuldades geralmente estão associadas ao tipo de *potencial* que a partícula está submetida. Ou seja, quanto mais elaborado for o potencial, maior a dificuldade matemática em se encontrar a função de onda.

Um bom alívio no trabalho matemático acontece quando o potencial é *independente do tempo*. Outra situação favorável ocorre quando a função de onda pode ser *fatorada* em dois termos: um dependente exclusivamente da posição e outro exclusivamente dependente do tempo. Nessas situações a equação original de Schrödinger se transforma em duas equações diferenciais independentes.

Vejamos, seja a equação de Scrödinger para uma dimensão:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

em muitas situações de interesse podemos fatorar $\Psi(x,t)$ de forma que:

$$\Psi(x,t)=\varphi(x).T(t)$$

então, retornando à equação de Schrödinger, temos:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\left[\Psi\varphi(x).T(t)\right]}{\partial x^2}+V(x,t)\varphi(x).T(t)=i\hbar\frac{\partial\left[\varphi(x).T(t)\right]}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar}{2m}T(t)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V(x,t)\varphi(x).T(t)=i\hbar\varphi(x)\frac{dT(t)}{dt}$$

$$-\frac{\hbar}{2m\varphi}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V=\frac{i\hbar}{T}\frac{dT(t)}{dt}$$

$$\frac{i\hbar}{T}\frac{dT(t)}{dt}=E\Rightarrow\int\frac{dT}{T}=-i\hbar E\int dt\Rightarrow\ln(T)=-i\hbar Et+C\Rightarrow T=e^{(-i\hbar Et+C)}$$

assim obtemos duas equações diferenciais independentes:

$$\boxed{T=Ae^{-i\hbar Et}}$$

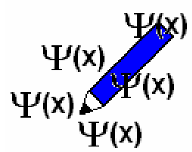
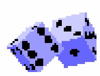
$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V\varphi=E\varphi}$$

onde esta última é conhecida como *equação de Schrödinger independente do tempo.*

4 – Soluções da equação de Schrödinger independente do tempo

Primeiramente vamos nos exercitar solucionando a equação independente do tempo em situações clássicas e, assim, gradativamente, nos acostumando com o *formalismo* da Mecânica Quântica.

Para resolvermos tais exercícios é interessante termos um roteiro, isto é, uma seqüência de etapas a serem seguidas, como ilustra a tabela abaixo:

	Etapas	**O que fazer?**
1	 Cálculo da função de onda	Resolver a equação de Schrödinger $-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$
2	 Normalização e cálculo da distribuição de probabilidades	$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\Psi dx=1$
3	 Cálculo dos valores esperados e verificação da consistência com o Princípio da Incerteza de Heisenberg	$\langle A\rangle=\int_a^b\Psi^* A\Psi dx$

Antes de prosseguirmos, vamos considerar mais de perto a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\varphi}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V=E\Rightarrow\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=-\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\alpha^2\varphi \quad \text{onde} \quad \alpha^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)$$

vamos admitir que a solução da equação diferencial seja da forma:

$$\varphi = Ae^{\beta x}$$

então:

$$\frac{d\varphi}{dx} = A\beta e^{\beta x}, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = A\beta^2 e^{\beta x}$$

retornando à equação diferencial, obtemos:

$$A\beta^2 e^{\beta x} = -\alpha^2 Ae^{\beta x} \Rightarrow \beta = \pm\, i\alpha$$

ou seja:

$$\varphi = Ae^{\pm i\alpha x}$$

$$\varphi = Ae^{\pm i\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V)}x}$$

Isso nos permite duas possibilidades: Se $(E-V) \geq 0$ temos *soluções oscilatórias* do tipo:

$$\varphi = Ae^{\pm i\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E-V|}x}$$

No entanto, se $(E-V) < 0$ temos *soluções exponenciais* do tipo:

$$\varphi = Ae^{\pm\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E-V|}x}$$

A *solução geral* da solução oscilatória pode ser obtida com uma *combinação linear* das *soluções particulares*. Ou seja:

$$\varphi = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$$

utilizando a relação de De Moivre:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\,\text{sen}\,\theta$$

temos:

$$\varphi = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \;\Rightarrow\; \varphi = C\cos(\alpha x) + D\text{sen}(\alpha x)$$

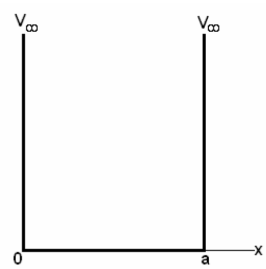
assim, resumindo:

$$\boxed{\varphi = Ae^{\pm k\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E-V|}x} \left\{\begin{array}{l} |E-V| \le 0 \rightarrow k = 1 \text{ (solução exponencial)} \\ \\ |E-V| > 0 \rightarrow k = i \text{ (solução oscilatória)} \\ \qquad \varphi = C\cos\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}x\right) + D\text{sen}\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}x\right) \end{array}\right\}}$$

Note que $\varphi(\text{x})$ foi determinada a menos de sua amplitude "*A*" que poderá ser determinada no processo de *normalização*.

4.1 - Poço Quadrado Infinito – O problema da partícula em uma caixa

Seja uma partícula de massa *m* que pode se mover *livremente* (V=0) no interior de uma caixa de largura *a* e de paredes infinitas (V_∞).



Nossos objetivos são:

a) Obter a função de onda que obedeça as condições de contorno
b) Calcular o valor esperado da posição e do momentum linear
c) Obter a incerteza da posição e do momentum linear e verificar a concordância com o princípio da Incerteza de Heisenberg

Ao trabalho!

a)Obtenção da função de onda

Nas regiões externas ao poço:

$$\varphi(x) = 0$$

Na região interna do poço V=0 , ou seja , E>V, assim temos soluções oscilatórias no interior do poço.

$$\varphi = A\cos\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x\right) + B\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x\right)$$

impondo a condição de contorno de que nas paredes e regiões externas da caixa a probabilidade de se encontrar a partícula é nula, podemos determinar *A* e *B*. Assim:

i) $\varphi(0) = 0$

$$\varphi(0) = A\cos\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,(0)\right) + B\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,(0)\right) \Rightarrow \varphi(0) = A$$

$$A = 0$$

ii) $\varphi(a) = 0$

$$\varphi(a) = B\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,(a)\right) = 0$$

$$sen\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,(a)\right) = 0 \Rightarrow \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE} = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, ..).$$

Observe que esta segunda condição de contorno, $\varphi(a) = 0$, nos oferece um importante resultado com relação a energia da partícula: ela é *quantizada*!

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.}$$

Assim finalmente obtemos a forma da função de onda que obedece todas as condições de contorno, exceto uma ...

$$\varphi(x) = B\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x\right)$$

Para determinarmos *B*, devemos invocar a *interpretação probabilística* proposta por **Max Born:**

$$P = \int_a^b \varphi\varphi^* dx$$

Logo se integrarmos $\varphi^*\varphi$ em *toda região no interior da caixa*, obtemos a *probabilidade* se de encontrar a partícula no interior da caixa que é, obviamente, 100%. Ou seja:

$$B^2\int_0^a sen^2\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x\right)dx = 1$$

realizando a integral, obtemos:

$$u = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x \Rightarrow du = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,dx \Rightarrow dx = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}du$$

$$x = 0 \rightarrow u = 0$$

$$x = a \rightarrow u = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE}$$

$$\frac{\hbar B^2}{\sqrt{2mE}\,\hbar}\int_0^{\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE}} sen^2(u)\,du = 1$$

utilizando a relação trigonométrica:

$$sen^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

temos:

$$\frac{\hbar B^2}{2\sqrt{2mE}}\int_0^{\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE}}(1-\cos 2u)\,du = 1 \Rightarrow B^2\left[u - \frac{sen2u}{2}\right]_0^{\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE}} = \frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$B^2\left[\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE} - \frac{sen\left(2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE}\right)}{2}\right] = \frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$sen\left(2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE}\right) = sen(2n\pi) = 0$$

$$B^2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mE} = \frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Desta forma, a amplitude B é determinada:

$$B = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$$

tomando o valor positivo para B $\varphi(x)$ pode ser escrita de forma completa:

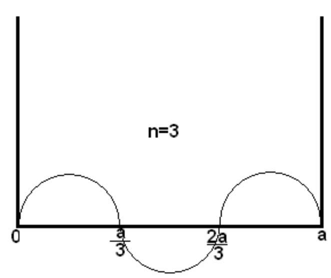
$$\boxed{\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}x\right)}$$

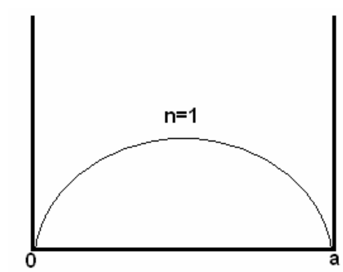
ou

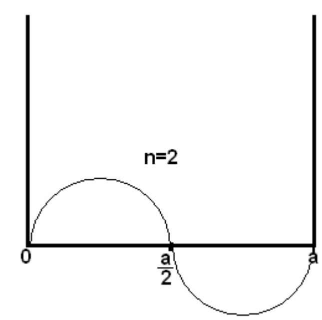
$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

Tomando o *número de onda* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, podemos calcular os comprimentos de onda permitidos para $\varphi(x)$:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{2a}{n}$$







b)Cálculo do valor esperado da posição e do momentum linear

Agora que possuímos a função de onda podemos calcular o valor esperado de qualquer *observável* físico. Nessa oportunidade calcularemos o valor esperado da posição e do momentum linear. Vejamos:

$$\langle x \rangle = \int_a^b \varphi(x)\varphi^* dx$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x sen^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

para n=1

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x sen^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx$$

resolvendo a integral através do método por partes

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x sen^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = sen^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx \rightarrow v = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{a}{2\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

$$v = \frac{x}{2} - \frac{a}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\left\{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_0^a - \int_0^a\left[\frac{x}{2} - \frac{a}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]dx\right\}$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\left\{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_0^a - \int_0^a\left[\frac{x}{2} - \frac{a}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]dx\right\}$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi a}{a}\right) - \frac{a^2}{4} + \frac{a}{4\pi}\cos\left(\frac{2\pi a}{a}\right)\right]$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

ou seja:

$$\boxed{\langle x\rangle = \frac{a}{2}}$$

Assim, o valor médio das posições ocupadas pela partícula ou equivalentemente *o valor esperado* da posição é o centro da caixa. Claro, intuitivamente, já esperávamos este resultado mas o objetivo maior desta empreitada matemática é nos familiarizarmos com as etapas e operações físico-matemáticas característica s da Mecânica Quântica.

Mais adiante vamos calcular a *incerteza da posição*, assim é útil, já calcularmos o valor esperado do *quadrado da posição*, assim:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x^2 sen^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx$$

$$u = x^2 \rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = sen^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx \rightarrow v = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{a}{2\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

$$v = \frac{x}{2} - \frac{a}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a}\left\{\left[\frac{x^3}{2} - \frac{ax^2}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_0^a - \int_0^a\left[\frac{x}{2} - \frac{a}{4\pi}sen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]2xdx\right\}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a}\left[\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a}{2\pi}\int_0^a xsen\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx\right]$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a}\left\{\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a}{2\pi}\left[-x\frac{a}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{a}{2\pi}\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx\right]\right\}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4\pi^2}\right) = \frac{2}{a}\left(\frac{6\pi^2 a^3 - 4\pi^2 a^3 - 3a^3}{12\pi^2}\right) = \frac{2\pi^2 a^2 - 3a^2}{6\pi^2}$$

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = \frac{2\pi^2 a^2 - 3a^2}{6\pi^2}}$$

Com relação ao momento linear:

$$\left\langle p \right\rangle = \int_a^b \varphi \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi^* \, dx$$

$$\left\langle p \right\rangle = -\frac{2i\hbar}{a} \int_a^b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a} \right) \frac{d}{dx} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a} \right) \right] dx$$

$$u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a} \right) \Rightarrow du = \left[\frac{d}{dx} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a} \right) \right] dx$$

$$\left\langle p \right\rangle = -\frac{2i\hbar}{a} \int_o^a u du = -\frac{2i\hbar}{a} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \left[-\frac{i\hbar}{a} sen^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \right]_0^a$$

$$\left\langle p \right\rangle = 0$$

Com relação ao quadrado do *momentum linear*:

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \int_a^b \varphi \left(\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi^* \, dx$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2} \left(\frac{2}{a^2} \int_0^a sen^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx \right)$$

$$\boxed{\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2}}$$

c) Cálculo das incertezas e verificação do Princípio da Incerteza de Heisenberg

Agora já estamos em condições de calcular as incertezas. Relembrando que, para qualquer observável *A*, a incerteza é obtida por:

$$\left\langle \Delta A \right\rangle^2 = \left\langle A^2 \right\rangle - \left\langle A \right\rangle^2$$

temos, para a posição:

$$\langle \Delta x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \Rightarrow \langle \Delta x \rangle^2 = \frac{2\pi^2 a^2 - 3a^2}{6\pi^2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow \langle \Delta x \rangle^2 = \frac{8\pi^2 a^2 - 12a^2 - 6\pi^2 a^2}{24\pi^2}$$

$$\boxed{\langle \Delta x \rangle^2 = \frac{a^2\left(2\pi^2 - 12\right)}{24\pi^2}}$$

para o momentum linear:

$$\langle \Delta p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

$$\boxed{\langle \Delta p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2}}$$

tomando o *produto das incertezas*, temos:

$$\langle \Delta x \rangle \ \langle \Delta p \rangle = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2\left(2\pi^2 - 12\right)}{24\pi^2}\right)} = \hbar\sqrt{\frac{\left(2\pi^2 - 12\right)}{24}}$$

o que resulta em:

$$\boxed{\langle \Delta x \rangle \ \langle \Delta p \rangle \cong 0,57\hbar}$$

De onde concluímos a *concordância* com o Princípio da Incerteza de Heisenberg.

5 – Bibliografia

[1] Tipler, P., “Física”, volume 3, *Editora LTC* (2000)

[2] Griffiths, D., “Introduction to Quantum Mechanics”, *Prentice Hall* (1995)

[3] Eisberg, R., Resnick, R. “Física Quântica”,*Editora Campus* (1994)

[4] Sakurai, J.J., “Modern Quantum Mechanics”, *Addison-Wesley* (1995)

[5] Merzbacher, E., “Quantum Mechanics”, *John Wiley & Sons* (1970)

[6] Tannoudji, C.C., Diu, B., Laloë, F., “Quantum Mechanics”, *John Wiley & Sons* (1977)